



KoMáR - 9. ročník

2020/2021

1. série

Ahoj!

Baví tě matematika? Máš rád řešení problémů, u kterých musíš použít hlavu? Díváš se na SPZ-ky aut a všímáš si těch, které jsou dělitelné 9-ti?

Pokud byla alespoň jedna z odpovědí ano a ty sám jsi ještě na základní škole (nebo v odpovídajícím ročníku víceletých gymnázií), pak je KoMáR určitě skvělý způsob, jak trávit nějaký ten volný čas. Při řešení získáš skvělou praxi a pokud budeš úspěšný, rozhodně tě neminou hezké ceny. Navíc, když s námi pojedíš na soustředění, můžeš potkat spoustu zajímavých lidí, zahrát si parádní hry a dozvědět se i něco zajímavého z matematiky. Máš chuť to zkusit? Tak do toho!

Chystané **podzimní soustředění** se bude konat o víkendu 16. - 18. 10. Tak si termín poznač v kalendáři a přijed'. Moc se na Tebe těšíme!

Více informací si můžeš přečíst na našich stránkách: *komar.math.muni.cz*.

Jak řešit

V každé sérii je osm příkladů, cílem však není vyřešit všechny, proto neváhej poslat byť i jediné řešení nebo jeho nástin. Důležité je řešení pečlivě okomentovat, pouze výsledek nebo zmatečná změť rovnic nemůže dostat plný počet bodů – pamatuj, že opravující musí ze tvého řešení pochopit tvůj tok myšlenek.

Každý vyřešený příklad sepiš na samostatný papír, na každý list se podepiš a uveď číslo úlohy, dej je do obálky a do termínu odeslání dané série je odešli na níže uvedenou adresu. My tvá řešení opravíme a se zadáním nové série, vzorovými řešeními a výsledkovou listinou ti je pošleme zpět. Odevzdávat můžeš i online prostřednictvím našich webových stránek.

Spolu s řešením první série nám pošli také svou adresu, kam ti máme posílat opravená řešení, a název školy a třídu, kde studuješ.

Příklady a bodování

Příklady jsou seřazeny od nejjednoduššího k nejobtížnějšímu. Přičemž za 0. příklad můžete obdržet až 2 body, za 1.–5. můžete obdržet až 5 bodů, za 6. až 6 bodů a za 7. až 7 bodů. Aby nebyli žáci vyšších tříd příliš zvýhodněni, tak jsme se rozhodli body přepočítávat podle níže uvedeného vzorečku:

$$x_v = \sqrt{(m + km)^2 + (km)^2 - (x_z - m - km)^2} - km$$

kde x_v je výsledný počet bodů za sérii, x_z je součet získaných bodů za všechny úlohy a m je maximální možný počet bodů za sérii (tedy 40 bodů). k je koeficient závislý na ročníku podle následující tabulky:

Ročník	Hodnota
6.	1,4
7.	2,3
8.	5
9.	35

Řešení posílej na adresu:

KoMáR

Gymnázium, Brno, tř. Kpt. Jaroše 14

658 70 Brno

S případnými dotazy ohledně semináře se můžeš obracet na organizátory, jejichž email najdeš na našich stránkách: www.komar.math.muni.cz, nebo se obrať na číslo vedoucího projektu 777 182 312 Petra Pupíka nebo na číslo 734 286 816 hlavní organizátory Ádi.

Hodně štěstí nejen při řešení KoMáRa přejí Petr, Janča, Míša, Áďa, Ondra, Lucka, Anička a dva Kubové.

Zadání První Série

Termín odevzdání: 27. října

Milý řešiteli/Milá řešitelko, moc Tě prosíme o vytvoření účtu na webu i v případě, že nebudeš řešení odevzdávat přes web. Pokud se nezaregistruješ, bohužel ti nebudeme moci připsat body. (Je nutné si založit nový účet, i když jsi ho loni měl.) Velice nám tím usnadníš práci. Děkujeme, Tví Orgové.

Bylo sychravé úterý a VP zrovna odcházel z práce. Jako každé ráno nastoupil na směnu do továrny na výrobu reklamních cedulí. Dneska měli obzvlášť napilno, protože se zítra slaví den Vlády. Před dávnou dobou totiž vládl v Misce chaos, dokud nepřišel pan A, nesestavil Senát s 26 křesly a nenastolil řád, díky němuž se teď v Misce žije klidně a spořádaně. Přesně tak by vám to řekl kdokoliv z obyvatelů Misky, protože přesně takto se to ve škole učí a žádná jiná pravda se neuznává.

Den založení Senátu se slaví jako Den míru a oslavuje se Senát, v čele tedy s panem A. Místo tradiční žluté, kterou mají občané Misky nakázáno nosit každou středu, si oblečou sváteční bílou, nošenou jen na významné svátky, jako je Den míru nebo narozeniny pana A. K dalším povinnostem každého občana na Den míru patří vyvěšení cedulí z oken. VP právě minul jednu ceduli s obrovským barevným nápisem „Mír v zemi, mír v srdci.“ Na ceduli, co mají doma stojí „Senát je řád, řád je Senát.“

Úloha 0. *Vymyslete další slogany, které si mohou občané Misky na svých cedulích vyvěsit.*

Jak se může ale takový řád udržet? Vždyť lidé jsou od přírody chaotičtí. Největší pákou, který na ně Senát má, je strach. Mají svoji jednotku Očí, vypadajících jako normální občané, dělající běžné věci. Přitom ale sledují ostatní obyvatele a nahlašují je. Za to, že někoho nahlásí, dostanou jisté výhody. Tyto výhody je posunou ve společenském žebříčku o patro výš, nad běžné občany, mezi které se VP řadí. Podle výročních statistik je Očí prý nesmírně málo, mezi občany se ale šušká, že snad polovina obyvatel jsou Oči. To by znamenalo, že na každého prostého občana je nasazeno právě jedno Oko.

Úloha 3. Zavedeme pojem „sudost“ čísla, což bude největší mocnina čísla 2, kterými je číslo dělitelné. (Sudost čísla 12 je 2, protože nejvyšší mocnina 2, která dělí 12 je číslo 4.) Mějme číslo 1680. Kolik má nejsudějších dělitelů? Rozuměj dělitelů, které jsou dělitelné nejvyšší mocninou dvojky mezi všemi jeho děliteli. (Číslo 12 a 20 je stejně sudé).

Babča mezitím donesla jídlo na skromný stůlek před televizi. Chutnalo jako vždycky skvěle. Babča uměla dokonalé hovězí, které ale dostávali přidělené jen jednou za měsíc. Televizi nevypnuli, hodila se jako dobrá kulisa. V televizi znovu zapraskalo a místo usměvavého moderátora na televizi pobíhaly jen samé jedničky a nuly.

Úloha 4. Popište, jak musí vypadat přirozené číslo A , jehož dekadický zápis se skládá pouze z 0 a 1, a které zároveň končí na 1, kterým když vynásobíme číslo 101, dostaneme opět číslo, jehož dekadický zápis se bude skládat pouze z 0 a 1. K tomu najděte všechna n pro která neexistuje žádné takové n -ciferné číslo A . (n -ciferné číslo má právě n cifer a první z nich není 0).

Z obrazovky se na ně dívala známá tvář Velkého B, snad jediného člena Senátu, kterého VP kdy viděl. Velký B, správně tedy senátor B, ale nikdo mu kvůli jeho podsadité postavě neřekl jinak než Velký B, byl jakýmsi mluvčím senátu.

„Vážení občane Misky, hovoří k vám senátor B, zástupce celého Senátu,“ zahájil jako vždy svůj proslov. Dál blábolil něco o soudržnosti a jednotě. To zabralo dalších pět minut. „Stala se velmi nemilá věc, kterou vám s lítostí musím oznámit. Zemřela naše souobčanka, sousenátorka a soupeřitelkyně, senátorka X. Na její počest nadále nebudeme používat písmeno X. Čest a mír, přátelé!“ Na obrazovce znovu chvíli běhaly jedničky a nuly a pak se na obrazovku vrátil přátelský úsměv moderátora s další soutěžní otázkou. Babča svraštila obočí. V tichosti pak dojedli večeři a VP se vrátil zpět do svého pokoje.

Zničehonic se z jeho skříně na oblečení vynořil mladý muž, odhadem tak na čtyřicet let s kaštanově hnědými kudrnatými vlasy: „Musíme jít.“ VP, kterého tato událost absolutně zaskočila, se zmohl jen na: „Eh.“ Muž mu přišel povědomý, jakoby ho už někdy viděl a vypadal docela přátelsky. To ale pořád neospravedlňovalo jeho přítomnost ve VPho pokoji. „Nemáme moc času, jdou po nás.“ V tu chvíli to v něm zašrotovalo, kdo jsou ti ONI, co po nich půjdou.

„To zvláštní vysílání?“ zeptal se. Povědomý muž jenom přikývl. „Vezmu

babču,“ prohlásil a otevřel dveře z pokoje. Dole se ozvalo skřípění dveří, muž chytil VPho za lem trička a přitiskl mu prst na rty, aby mlčel. „Kde je váš vnuk?“ ozval se zezdola nevlídný a zhrublý hlas. „Není tady,“ odvětila tvrdě babča. Muž ho popostrčil směrem ke skříni. „Babičce už nepomůžeme. Je tam nejméně dvacet Policistů,“ odvětil provinile muž. „Přece ji tady ale nemůžu nechat!“ Z dolního patra se ozvala hlasitá rána: „Prohledejte celý dům, deset mužů do horního patra, deset mužů dole.“ Tentokrát už neznámý muž neváhal, prostě hodil VP do skříně a zavřel za sebou. Přestože to byla klukova skříň, očividně ji ten muž znal lépe než on. Otevřel záda té skříně a vzniklými dveřmi VP prostrčil. VP se ocitl sám v kruhové místnosti. Dveře, které použil ke vstupu, už zmizely. Neznámý muž do kruhové místnosti vstoupil jinými dveřmi.

Úloha 5. *Do místnosti vede sedm dveří, označené čísly 1 – 7. Čtyřmi se vchází (1 – 4), třemi se vychází (5 – 7). Poté, co jedněmi dveřmi projde člověk, ty dveře okamžitě zmizí – to znamená, že jedněmi dveřmi může projít maximálně jeden člověk. Zjistěte, kolik má možností dvojice na vejítí a zase vyjít z této místnosti, kde samozřejmě jsou dvě různé situace, když první člověk vejde 1 a odejde 5, druhý člověk vejde 2 a odejde 6, oproti situaci, když první člověk vejde 2 a odejde 6 a ten druhý vejde 1 a odejde 5 – (záleží na pořadí).*

„To bylo o fous,“ pronesl muž a znalecky začal ťukat na zbylé dveře. VPho prostě modré oči zvlhly. „Co bude teď s babčou?“ Muž se zoufale nadechl a otočil se k ještě zoufalejšímu VPmu, z jehož pohledu v očích věděl, že odpověď zná. Pohleděl mu do tváře a objal ho. Z části, aby VPho utěšil, z části, aby zakryl svůj usazený výraz. „Musíme už jít,“ pronesl do ticha. Zvolil dveře s hlubokým dunivým tónem a kluka jimi prostrčil. „Pokračuj, dokud budeš moct, až před tebou bude zeď zadáš PIN, co používáš na skříňku v továrně.“ Dveře zmizely a VP se ocitl sám v uzoulinké chodbě. Pokračoval chvíli dál, slyšíc jen dunění svých kroků, než narazil na slepou uličku. Došel ke zdi, kde se nacházely tři kotouče s deseti čísly.

Úloha 6. *VP má trojmístný PIN, ale zapomněl ho. Jediné, co ví, je, že PIN obsahoval číslice 6 a 4, pro která platilo, že 6 byla určitě před 4. Jaká je pravděpodobnost, že trefí ten správný PIN hned na první pokus? (Pravděpodobnost počítáme jako počet příznivých situací – ten správný PIN – ku počtu všem situacím – všem možným PINům, které odpovídají podmínkám.)*

VP trefil PIN hned na druhý pokus. Odsunul zeď. Před ním se objevil obličej muže ze skříně: „No, tak už polez.“ VP proskočil malým otvorem a ocitl se v obrovské podzemní síni. Rozhlédl se kolem a dívalo se na něj spousta zvědavých očí. Překvapilo ho ale, že každý byl oblečený v jiné barvě.

„Eeeeh. Ahoj?“ nervózně zamával obecenstvu. Síni se ozval šum. „Tohle je Odboj synku,“ hrdě zazářil muž ze skříně. „Slyšel jsem o Odboji dost. Ale myslel jsem, že jsou to jen pohádky!“ užasl VP. Síň byla nesmírně strohá. Spíše než síň, to byl sklad zbavený všech strojů, na jejich místě stáli všude lidé. Na boku na stěně byly hodiny. Bohužel měly jen tři číslice, protože čtvrtá už odpadla.

Úloha 7. *Číslo n je liché přirozené číslo, které je dělitelné 3. Odebereme z něj poslední cifru a vzniklé číslo m je stále dělitelné 3. Najděte všechna n , která jsou druhou mocninou nějakého přirozeného čísla, pokud víte, že m není dělitelné 9.*

„Páni, netušil jsem, že je vás tolik,“ rozzářil se VP. „Teď už o jednoho víc, VP,“ odvětil muž ze skříně. „Jo, eh, jmenuji se P,“ natáhl před sebe ruku, aby se mohl s VP slušně pozdravit. „P? Jako jenom P?“ divil se VP. „Jojo. A tohle je JK, náš hlavní technik.“ Na VP se usmíval vyšší, nesportovní, přesto ale docela pohledný mladík. „Vítej. Odbojníku.“

POKRAČOVÁNÍ V PŘÍŠTÍ SÉRII